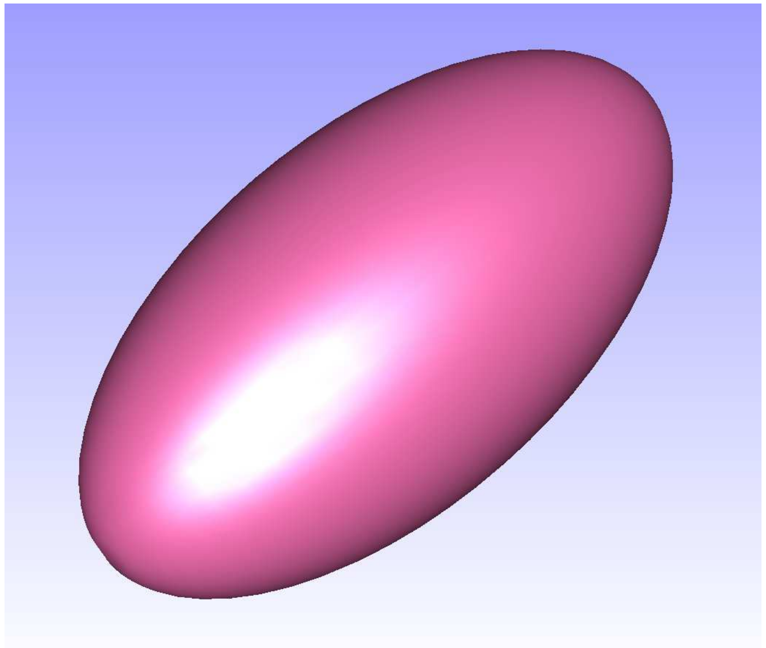
Aufgabe 1

Experimentelle Daten aus einem Wasserkanal für die Umströmung von Kugeln und Ellipsoiden sind gegeben. Die Experimente werden verwendet, um die Kräfte auf Kugeln und Ellipsoiden in Luft vorherzusagen. Die folgenden Werte sind gegeben:

	Dichte $[\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}]$	Viskosität [Pas]	Durchmesser [m]
Wasserkanal	1000	$1.5 \cdot 10^{-3}$	1
Luft	1.225	$17 \cdot 10^{-6}$	5

Die Strömungsgeschwindigkeit im Wasserkanal beträgt $u = 15$ m/s. 5 Modelle mit unterschiedlichen Längen wurden getestet. Die gemessenen Kräfte stehen in folgender Tabelle:

Länge [m]	F_D [N]	
1	17670	$\star$
2	8390	
3	8217	$\star$
6	11194	
10	17670	$\star$



Aufgabe 1

a) Berechnen Sie die Kraft in Luft auf einen Ellipsoiden mit dem Durchmesser D = 5 m und einer Länge L = 15 m bei einer Geschwindigkeit u_1 = 100 km/h und bei u_2 = 180 km/h.

b) Berechnen Sie den Widerstandskoeffizienten der experimentellen Daten als Funktion der Stirnfläche und als Funktion der Referenzfläche $A_{ref} = V^{2/3}$. Das Volumen eines Ellipsoiden wird mit den Halbachsen $V = \frac{4}{3}\pi abc$ berechnet. Zeichnen Sie ihr Ergebnis in ein Diagramm.

c) Die Messergebnisse werden verwendet, um das Minimum für den Widerstandsbeiwert zu bestimmen. Nehmen Sie an, dass die Beziehung zwischen der Schlankheit und dem Widerstandsbeiwert, basierend auf der Stirnfläche durch eine Parabel zweiten Grades beschrieben werden kann und berechnen Sie aus den Messwerten das Minimum.

d) Die Messergebnisse werden verwendet, um das Minimum für den Widerstandsbeiwert zu bestimmen. Nehmen Sie an, dass die Beziehung zwischen der Schlankheit und dem Widerstandsbeiwert, basierend auf der Referenzfläche $A_{ref} = V^{2/3}$ durch eine Parabel zweiten Grades beschrieben werden kann und berechnen Sie aus den Messwerten das Minimum.

e) Drei der gemessenen Werte (markiert mit $\star$) werden verwendet, um eine exakte Parabel zweiten Grades zu bestimmen. Bestimmen Sie die nötigen Koeffizienten und berechnen Sie das Minimum.

Aufgabe 1

a) • Schlankheitsgrad: L/D = 3

• Reynoldszahl in Wasser: $\mathrm{Re}_W = \frac{\varrho_W u_W D_W}{\mu_W} = \frac{1000 \cdot 15 \cdot 1}{1.5 \cdot 10^{-3}} = 10^7$

• Reynoldszahl in Luft: $\mathrm{Re}_1 = \frac{\varrho_A u_1 D_A}{\mu_A} = \frac{1.225 \cdot 27.8 \cdot 5}{17 \cdot 10^{-6}} \approx 10^7$

• Reynoldszahl in Luft: $\mathrm{Re}_2 = \frac{\varrho_A u_2 D_A}{\mu_A} = \frac{1.225 \cdot 50 \cdot 5}{17 \cdot 10^{-6}} \approx 1.8 \cdot 10^7 \Longrightarrow$ ZU GROSS

$$c_D = \frac{F_{D,W}}{\frac{1}{2}\varrho u_W^2 \frac{\pi}{4} D_W^2} = \frac{8217}{\frac{1}{2} \cdot 1000 \cdot 15^2 \frac{\pi}{4} 1^2} = 0.093$$

$$F_{D,A} = c_D \cdot \frac{1}{2}\varrho u_A^2 \frac{\pi}{4} D_A^2 = 0.093 \cdot \frac{1}{2} 1.225 \cdot 27.8^2 \frac{\pi}{4} 5^2 = 864.4N$$

Aufgabe 1

b)

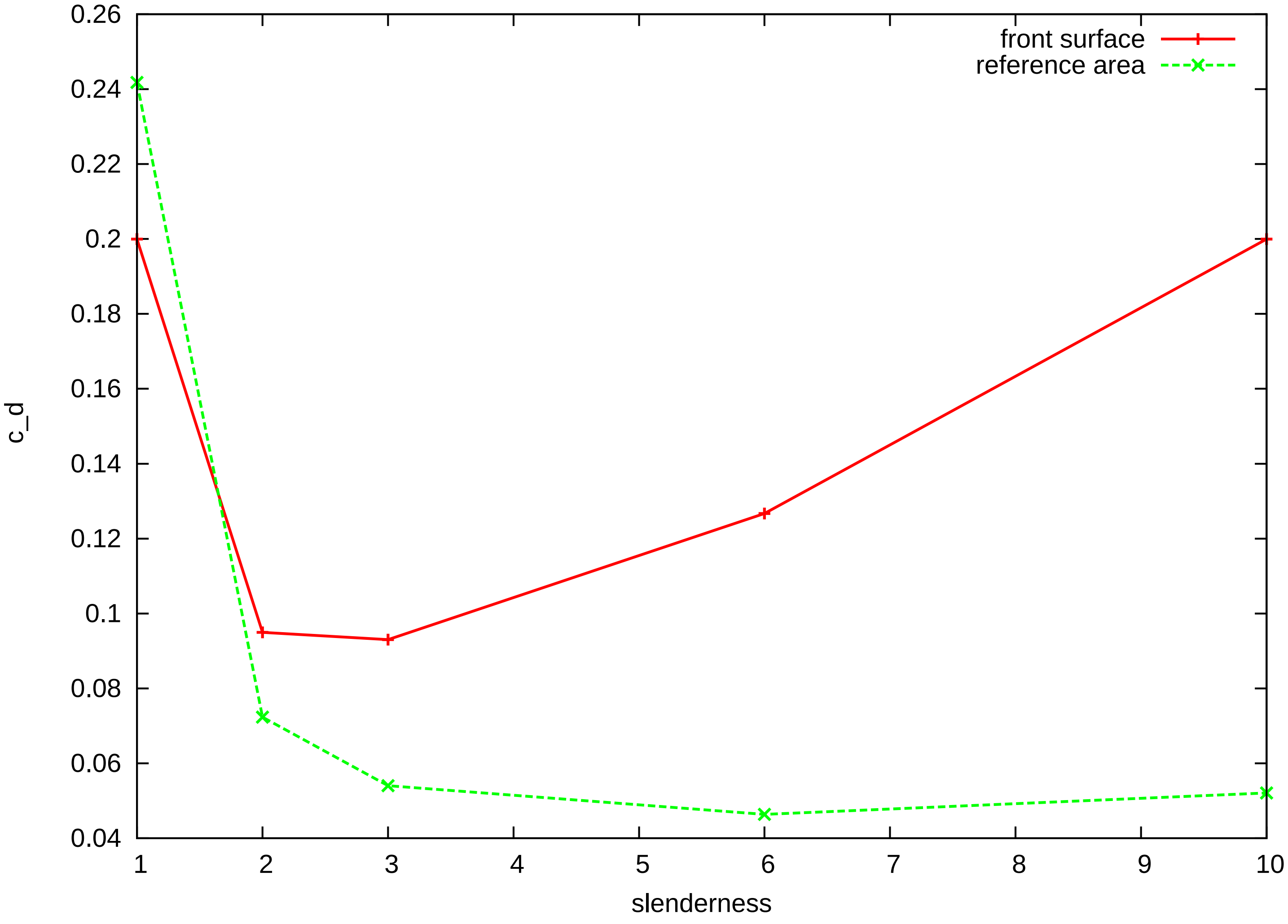
$$c_{D,F} = \frac{F_{D,W}}{\frac{1}{2}\varrho u_W^2 A_F}$$

$$c_{D,ref} = \frac{F_{D,W}}{\frac{1}{2}\varrho u_W^2 A_{ref}}$$

$$A_F = \frac{\pi}{4} D_W^2 \qquad A_{ref} = \left(\frac{1}{6}\pi D_W^2 \cdot L\right)^{2/3}$$

Länge [m]	F_D [N]	A_f [m]^2	c$_{D,F}$	Vol [m]^3	A$_{ref}$ [m]^2	c$_{D,ref}$
1	17670	0.785	0.2	0.52360	0.64963	0.24178
2	8390	0.785	0.095	1.04720	1.03122	0.07232
3	8217	0.785	0.093	1.57080	1.35128	0.05405
6	11194	0.785	0.127	3.14159	2.14503	0.04639
10	17670	0.785	0.2	5.23599	3.01531	0.05209

Aufgabe 1



0.26
0.24
0.22
0.2
0.18
0.16
0.14
0.12
0.1
0.08
0.06
0.04
c_d
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
slenderness
front surface
reference area

Aufgabe 1

c) Methode der kleinsten Fehlerquadrate

- Minimiere den Fehler der Ansatzfunktion

$$S = \sum_{i=1}^{n} {r_i}^2 \qquad \text{mit} \qquad r_i = y_i - f(x_i)$$

- In diesem Fall

$$f(x_i) = a \cdot x_i^2 + b \cdot x_i + c \qquad \text{mit} \qquad n = 5$$

  - x_i: Schlankheitsgrad
  - y_i: Widerstandskraft oder -beiwert
  - x_i und y_i sind bekannte Größen $\longrightarrow$ 3 Unbekante: a, b, c

- Berechnung der Unbekannten, sodass S ein Minimum hat.
- Minimum einer Funktion mehrere Veränderlicher $\longrightarrow$ Die erste Ableitung muss für alle Variablen Null sein.

Aufgabe 1

$$S(a,b,c) \;=\; \sum_{i=1}^{5}\left[y_i - \left(a\cdot x_i^2 + b\cdot x_i + c\right)\right]^2$$

$$\frac{\partial S(a,b,c)}{\partial a} \;=\; \sum_{i=1}^{5} -2x_i^2\left[y_i - \left(a\cdot x_i^2 + b\cdot x_i + c\right)\right] = 0$$

$$\frac{\partial S(a,b,c)}{\partial b} \;=\; \sum_{i=1}^{5} -2x_i\left[y_i - \left(a\cdot x_i^2 + b\cdot x_i + c\right)\right] = 0$$

$$\frac{\partial S(a,b,c)}{\partial c} \;=\; \sum_{i=1}^{5} -2\left[y_i - \left(a\cdot x_i^2 + b\cdot x_i + c\right)\right] = 0$$

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{5} x_i^2\left[y_i - \left(a\cdot x_i^2 + b\cdot x_i + c\right)\right] &= 0 & \qquad a\sum_{i=1}^{5} x_i^4 + b\sum_{i=1}^{5} x_i^3 + c\sum_{i=1}^{5} x_i^2 &= \sum_{i=1}^{5} x_i^2 y_i \\
\sum_{i=1}^{5} x_i\left[y_i - \left(a\cdot x_i^2 + b\cdot x_i + c\right)\right] &= 0 \;\Longrightarrow & a\sum_{i=1}^{5} x_i^3 + b\sum_{i=1}^{5} x_i^2 + c\sum_{i=1}^{5} x_i &= \sum_{i=1}^{5} x_i y_i \\
\sum_{i=1}^{5} \left[y_i - \left(a\cdot x_i^2 + b\cdot x_i + c\right)\right] &= 0 & a\sum_{i=1}^{5} x_i^2 + b\sum_{i=1}^{5} x_i + 5\cdot c &= \sum_{i=1}^{5} y_i
\end{aligned}$$

Aufgabe 1

lineares Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{5} x_i^4 & \sum_{i=1}^{5} x_i^3 & \sum_{i=1}^{5} x_i^2 \\ \sum_{i=1}^{5} x_i^3 & \sum_{i=1}^{5} x_i^2 & \sum_{i=1}^{5} x_i \\ \sum_{i=1}^{5} x_i^2 & \sum_{i=1}^{5} x_i & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{5} x_i^2 y_i \\ \sum_{i=1}^{5} x_i y_i \\ \sum_{i=1}^{5} y_i \end{pmatrix}$$

x	y
1	0.2
2	0.095
3	0.093
6	0.127
10	0.2

Lösung mit Cramer'sche Regel

Aufgabe 1

$$\sum_{i=1}^{5} x_i = 22. \qquad \sum_{i=1}^{5} x_i^2 = 150. \qquad \sum_{i=1}^{5} x_i^3 = 1252 \qquad \sum_{i=1}^{5} x_i^4 = 11394$$

$$\sum_{i=1}^{5} y_i = 0.7146099 \qquad \sum_{i=1}^{5} x_i y_i = 3.4288622 \sum_{i=1}^{5} x_i^2 y_i = 25.975976$$

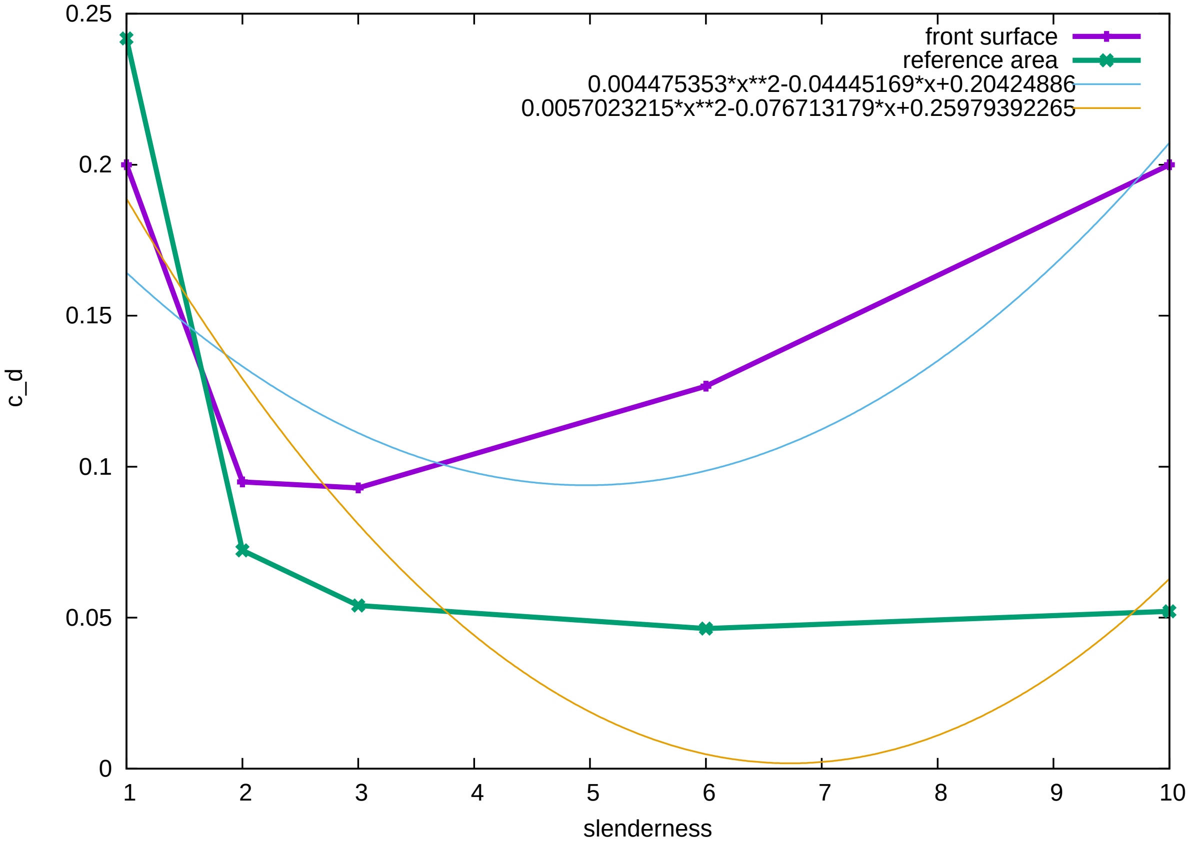
$$\begin{aligned} a &= 4.475353E - 003 \\ b &= -4.445169E - 002 \\ c &= 0.204248 \end{aligned}$$

$$f(x) = 4.475353E - 003 \cdot x^2 \; - \; 4.445169E - 002 \cdot x + 0.204248$$

$$\frac{df}{dx} = 0 \Longrightarrow x \; = \; \frac{4.445169E - 002}{2 \cdot 4.475353E - 003} = 4.966278$$

$$f(x) \; = \; 9.3869E - 002$$

Aufgabe 1



0.25
0.2
0.15
0.1
0.05
0
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
c_d
slenderness
front surface
reference area
0.004475353*x**2-0.04445169*x+0.20424886
0.0057023215*x**2-0.076713179*x+0.25979392265

Aufgabe 1

d)

$$a = 5.7023215E - 003$$
$$b = -7.671317E - 002$$
$$c = 0.2597939$$

$$f(x) = 5.7023215E - 003 \cdot x^2 \; - \; 7.6713179E - 002 \cdot x + 0.2597939$$

$$\frac{df}{dx} = 0 \Longrightarrow x \;=\; \frac{7.671317E - 002}{2 \cdot 5.7023215E - 003} = 6.7264866$$

$$f(x) \;=\; 1.7888355E - 003$$

Aufgabe 1

e)

Hinweis zu e: exakte Lösung an Stelle der Methode der kleinsten Quadrate

- $$f(x_i) = a \cdot x_i^2 + b \cdot x_i + c \qquad \text{mit} \qquad n = 3$$
  - x_i: Schlankheitsgrad oder Länge
  - F: Widerstandskraft
  - x_i und F sind bekannte Größen $\longrightarrow$ 3 Unbekannte: a, b, c
- lineares Gleichungssystem

$$\begin{aligned}
F(x_1 = 1) &= a * x_1^2 + b * x_1 + c = 17670 \\
F(x_3 = 3) &= a * x_3^2 + b * x_3 + c = 8217 \\
F(x_5 = 10) &= a * x_5^2 + b * x_5 + c = 17670
\end{aligned}$$

Aufgabe 1

$$
\begin{aligned}
F(x_1 = 1) &= 1 \cdot a + 1 \cdot b + c = 17670 && (1)\\
F(x_2 = 3) &= 9 \cdot a + 3 \cdot b + c = 8217 && (2)\\
F(x_2 = 10) &= 100 \cdot a + 10 \cdot b + c = 17670 && (3)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(2) - (1): \quad 8 \cdot a + 2 \cdot b &= -9453 && (4)\\
(3) - (2): \quad 91 \cdot a + 7 \cdot b &= 9453 && (5)
\end{aligned}
$$

$$
2 * (5) - 7 * (4): \quad 126 \cdot a = 85077 \qquad (6)
$$

$$
\begin{aligned}
a &= 85077/126 = 675.214 && (7)\\
b &= (9453 - 91 \cdot 675.214)/7 = -7427.357 && (8)\\
c &= 17670 - 675.214 - (-7427.357) = 24422.143 && (9)
\end{aligned}
$$

Aufgabe 1

$$F = 675.214 * x^2 - 7427.357 * x + 24422.143 \tag{10}$$

$$\frac{dF}{dx} = 2 \cdot 675.214 \cdot x - 7427.357 = 0 \Longrightarrow x = \frac{7427.357}{2 \cdot 675.214} = 5.5 \tag{11}$$

$$\Longrightarrow F(x) = 675.214 \cdot 5.5^2 - 7427.357 \cdot 5.5 + 24422.143 = 3996.903 \tag{12}$$